VARECZA ÁRPÁD
Nyíregyháza, Tanárképző Főiskola

Halmazok alkalmazása szakköri feladatok megoldásában

Az általános iskola felső tagozata matematika szakköreinek tematikája összeállításához sok, nagyon jó szakköri füzet, útmutató, feladatlap áll rendelkezésre. Ezen segédeszközök felhasználása megkönnyíti és eredményesebbé teszi a szakkörök munkáját. A következőkben ezen segédeszközök körét bővítjük olyan feladatsorral, melyet az előzőek nem, vagy alig érintenek, pedig a logikus gondolkodásra nevelésnek hatékony eszközei lehetnének. Ezek a halmazok segítségével könnyen megoldható feladatok. Ilyen feladatokkal a példatárakban ugyan találkozunk, de ezek megoldása más utat követ, mint amit magunk elé tűzünk. A feladatok megoldása során a megoldás mellett lényeges szerepet játszik az a szemléletmód, melyet a megoldások tükröznek.

A matematika minden ágát — de nemcsak a matematika, hanem minden tudomány — átszövi az „és", „vagy", „nem", „minden", „van olyan" stb. kötőszavak, melyek ítéletek, predikátumok közötti kapcsolatot fejeznek ki. Ezen kötőszavaknak — melyeket a matematikai logikában „műveletek"-nek nevezünk — a következetes alkalmazására a matematika oktatásában jelentős szerep hárul. Sajnos, mint Krygowska írja a „A logika elemei a középiskolai matematika tanításban" című cikkében (13. o.) „A kisgyermek első osztályban jól megérti a mindennapi helyzetekben a diszjunkció és konjunkció intuitív értelmét az ötödik osztályos tanuló azonban már nem tudja megállapítani egy egyszerű matematikai helyzetben sem, hogy a „vagy", vagy az „és" szót kell-e írnia". Ha a fentieket nem is szó szerint vesszük, a felvetett probléma létezik, és az oktatás során a felmerülő hiányosságok csökkentésére kell törekedni. A tanulókat rá kell nevelni arra, hogy ezek a kötőszavak az ítéleteik *lényegét* alkotják. Ennek a célnak megvalósításában jó szolgálatot tehetnek a „halmazábrák", vagyis a Venn-féle diagrammok. A megefelelő feladatok spontán kínálják a lehetőséget ilyen ábrák készítésére és a szükséges elemzések elvégzésére. A következőkben szakköri munka keretén belüli alkalmazás lehetőségét tárjuk fel, de ezzel nem zárjuk ki a megfelelő anyagrészeknél az órán való alkalmazási lehetőséget sem.*

A feladatok kiválasztásánál és tárgyalásánál a Nyíregyházi Tanárképző Főiskola 2. sz. gyakorló iskolájában végzett ez irányú kísérletek eredményét vesszük figyelembe. A kísérlet során a tanulók nagy érdeklődést és aktivitást tanúsítottak és megfigyelhető volt az alkotó gondolkodás és bizonyítási igény ébredése. Ebben a munkában nagy szerepe volt Boroska Miklós gyakorló iskolai szakvezető tanárnak, aki a kísérletet vezette. A feladatsor 9 foglalkozásra tagolódik. Az 5—6 osztályos szakkörben 5—6 foglalkozásig lehet eljutni, míg 7—8 osztályos szakkörben az egészre sor kerülhet.

A feladatok tárgyalása során az 1—4 foglalkozás feladatait részletesebben kidolgozzuk, míg a többinél — a terjedelem túlságos növekedése miatt — a megoldás s az ábrák elemzése rövidebb, de a további részletesebb elemzés az előzőek alapján elvégezhető s ezen elemzések elvégzése nagyon ajánlatos. A feladatok az „és" „nem",

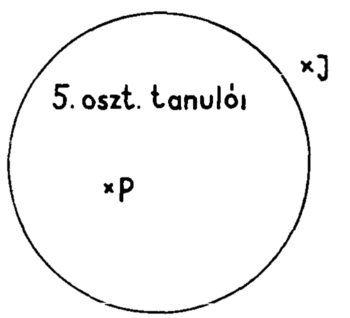
* (L.: Varecza Árpád, Matematika Tanítása 1969. 2. és 6. szám, 1970. 2. szám, Módszertani Közlemények, 1970. 1. és 2. szám.)

„vagy” kötőszavak értelmes használata mellett a tanulókban kialakítja a „halmaz”, „eleme”, „nem eleme”, „részhalmaz”, „üreshalmaz” fogalmakat is, annak ellenére, hogy ezeket nem mindig nevezzük nevükön. A 4. foglalkozástól kezdve a feladatokat célszerű kiadni előre a tanulóknak, hogy szakkörön a tárgyalás könnyebb legyen, hiszen a feladatok, három halmazos esetekben, logikailag elég összetettek. A feladatsor a következő:

1. foglalkozás:

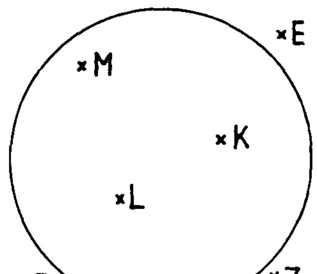
1. Az ötödik osztály tanulóit „kerítsük be”. Ha Péter (P) ötödikes, hova teszed? Ha Julika (J) hetedikes, akkor helyezd el az ábrán!

Az 1. ábrán helyezzük el a szakkörben részt vevő tanulókat!



1. ábra

2. Vegyük a háziállatokat. Készítsünk az 1. ábrához hasonló ábrát! (Az állatokat a tanulók sorolják.) (2. ábra.)

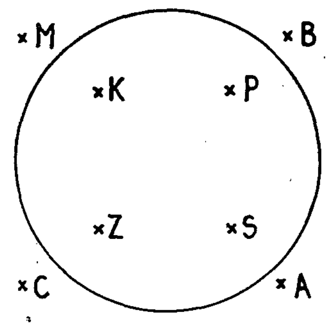


2. ábra

M: macska	E: elefánt
K: kutya	L: liba
F: farkas	Z: zsiráf

3. Az 5. osztály jó tanulóinak neveinek első betűi K, P, Z, S, s a rossz tanulók neveinek első betűi B, C, M.

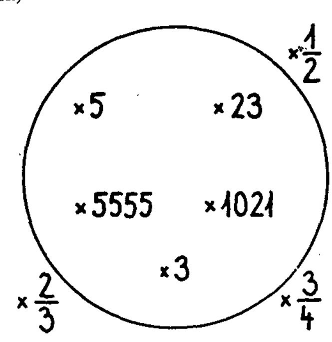
Készítsünk az előzőhöz hasonló ábrát! (3. ábra.) A jó tanulók kerüljenek a körön belül, rosszak pedig kívül. (Fordítva is lehet!)



3. ábra

K: a körbe kerül, mert jó tanuló. P: szintén a körben van, mert ő is jó tanuló. B: nem kerülhet a körbe, mert nem jó tanuló. Ha A közepes tanuló, akkor hova tesszük? A szintén a körön kívül lesz, mert ő sem jó tanuló.

4. Jelöljük az egész számokat E-vel. Készítsünk az előzőhöz hasonló ábrát. (4. ábra.) (Ezután az ilyen ábrákat halmazábráknak fogjuk nevezni.)



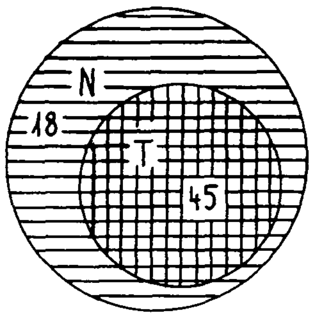
4. ábra

5-t a körbe kell tenni, mert egész. Hasonlóan a körbe kerül 3, 23, 5555, 1021 stb. A körön kívül helyezzük el az 1/4, 2/3, 3/4 stb. számokat.

Így tulajdonképpen az eleme (∈) és nem eleme (∉) fogalmakat alakítjuk ki a tanulókban. A jeleket nem szükséges bevezetni, de mi a továbbiakban alkalmazzuk az egyszerűség kedvéért. Az 1—4. feladat tárgyalása során az is kitűnik, hogy 1—3 esetben a halmaznak véges sok eleme, míg a 4. esetben végtelen sok eleme van.

5. Egy iskolában két nyolcadik osztály van, összesen 63 tanulóval, s ezek közül 45 tanuló továbbtanul. Készítsünk halmazábrát, s olvassunk le róla mindent, amit lehet!

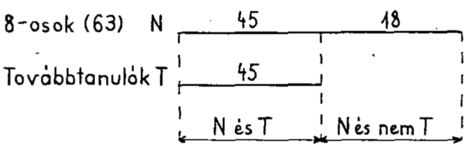
Jelölje N a nyolcadik osztályosokat,
T a továbbtanulókat. (5. ábra)



5. ábra

Mivel minden továbbtanulónak nyolcadikosnak kellett lennie, így a továbbtanulók a nyolcadik osztályt végzettek közül kerülnek ki. Tehát azokat a tanulókat, akik nyolcadikat végeztek *és* továbbtanulnak N-en belül kell elhelyeznünk. ($T \subset N$) Az 5. ábrán ezt a kétszeresen vonalkázott rész jelöli. A kétszeresen vonalkázott részben 45 tanuló van, de mert összesen 63 nyolcadikos van, ezért azoknak a száma, akik nyolcadikosok *és* nem tanulnak tovább (egyszeresen vonalkázott rész) $63 - 45 = 18$.

Ha a nyolcadik osztályos tanulókat sorba állítjuk, és egymás mellé állnak azok, akik továbbtanulnak, kapjuk a 6. ábrát. ($T \subset N$)



6. ábra

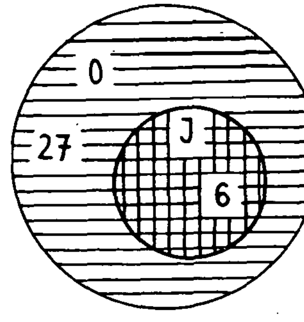
2. foglalkozás

1. Egy 5. osztályban 6 jó tanuló van és 27 tanuló ötödikes még, de nem jó tanuló. Menynyi az osztály létszáma? Készítsünk halmazábrát!

Jelölje O az ötödikeseket,
J a jó tanulókat. (7. ábra)

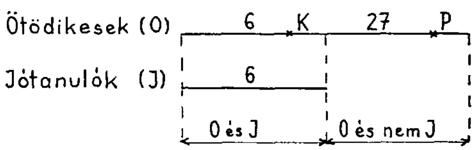
Mivel a jó tanulók is ötödikesek, ezért O-n belül kell őket elhelyezni ($J \subset O$), de vannak olyan ötödikesek, akik nem jó tanulók.

Ha vízszintesen vonalkázzuk az ötödikeseknek megfelelő halmazt, és függőlegesen a jó



7. ábra

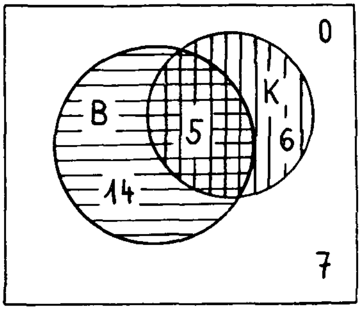
tanulóknak megfelelő halmazt, akkor a kétszeresen vonalkázott részben vannak azok a tanulók, akik ötödikesek *és* jó tanulók; míg az egyszeresen vonalkázott részben azok, akik ötödikesek *de* (de helyett „és"-t is tehetnénk) nem jó tanulók. Az osztály létszámát a jó tanulók és a nem jó tanulók teszik ki, így az osztálylétszám $6 + 27 = 33$. (A közepes tanulók is az egyszeresen vonalkázott részbe kerülnek, mert a nem jó tanulók közé nemcsak a rossz tanulók, hanem ők is beletartoznak. Ezzel a helyes negáció (tagadás) problémája kerül előtérbe, mely nem mindig helyesen alakul ki a tanulókban, ezért a továbbiakban erre nagy súlyt kell helyezni. Gyakori hiba például erre: „x pozitív szám", tagadása „x nem pozitív" s nem az, hogy „x negatív", hiszen „x nem negatív" esetén $x = 0$ is lehet.) Készítsünk a 6. ábrához hasonló ábrát is. A tanulókat sorba állítva és ha az 5 jó tanuló egymás mellé áll, akkor adódik a 8. ábra.



8. ábra

Célszerű az osztályból vett tanulókat az ábrán elhelyezni. Pl.: K jó tanuló, P nem jó tanuló. (A továbbiakban is néhány elemet helyezzünk el az ábrákon.)

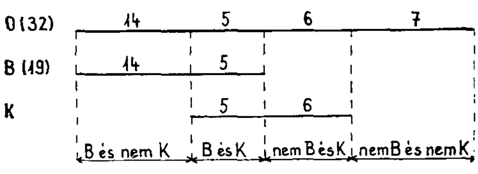
2. Egy 5. oszátlyba 32 tanuló jár, s közülük 19 barna hajú s a barna hajúak közül 5-nek kék a szeme. Azon tanulóknak a száma pedig, akiknek kék a szemük, vagy barna a hajuk 25. Mennyi azon tanulók száma, akik kékszeműek, de nem barna hajúak? Sem nem barnahajúak, sem nem kékszeműek? Barnahajúak, de nem kékszeműek? Jelölje most az ötödikesek halmazát (O) egy téglalap, B halmaz a barnahajúakat, K halmaz a kékszeműeket. (9. ábra) Mivel az ötödik osztályosokat



9. ábra

nézzük, ezért a kékszeműek és a barnahajúak is O-n belül helyezkednek el. Ha valaki 6.-os és kékszemű, akkor ezt O-n kívül kell elhelyezni. A barnahajúak között vannak kékszeműek is, így lesz olyan tanuló, aki a B-be és a K-ba is beletartozik ($B \cap K \neq \emptyset$). Ha vízszintesen vonalkázzuk a barnahajúakat, függőlegesen pedig a kékszeműek halmazát, akkor a kétszeresen vonalkázott részben vannak azok, akik barnahajúak *és* kékszeműek. Mivel a barnahajúak *és* kékszeműek száma 5, ezért a kétszeresen vonalkázott részben 5 tanuló van; de a barnahajúak száma 19, ezért azok száma, akik barnahajúak *és nem* kékszeműek 19—5= =14. Azon tanulók száma, akiknek barna a hajuk, *vagy* kék a szemük 25 (azaz legalább egyik teljesül), így a kékszeműek, *de nem barnahajúak* száma 25—19=6. Azon tanulók száma pedig, akik sem nem kékszeműek, sem nem barnahajúak 32—25=7.

A 8. ábrához hasonló ábrát kapunk, ha a tanulókat egymás mellé állítjuk úgy, hogy először a barnahajúak, utána a kékszeműek — ezeken belül a barnahajúak és kékszeműek egymás mellé kerülnek — majd azok, akik sem nem kékszeműek, sem nem barnahajúak, akkor

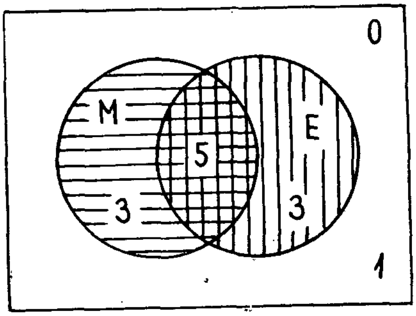


10. ábra

kapjuk a 10. ábrát, melyről minden könnyen leolvasható. (Helyezzünk el néhány tanulót az ábrán!) Kiemelkedő, hogy minden tanuló szerepel valahol, de csak egyszer, azaz a H halmaznak nincsenek többszörös elemei.

3. Egy őrs, mely 12 tagból áll, csapatkarneválra készül. Az őrs minden tagja a karneválon jelmezben és a jelmezhez illő mondókával fog megjelenni. 8 gyereknek már van jelmeze, 5-nek jelmeze és mondókája, 11-nek vagy jelmeze, vagy mondókája. Hány gyereknek nincs még jelmeze? Hányan vannak, akik még hozzá sem kezdtek a készülődéshez? Hány gyereknek van mondókája?

Jelölje: M az őrs azon tagjait, akiknek mondókája van; E az őrs azon tagjait, akiknek jelmezük van; O pedig az őrs tagjait. (11. ábra)



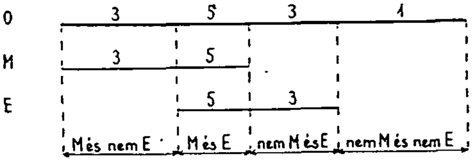
11. ábra

Vonalkázzuk a mondókával rendelkező tanulók halmazát vízszintesen, a jelmezzel rendelkező tanulók halmazát függőlegesen, akkor, mivel vannak olyan tanulók, akik már mindkettővel rendelkeznek, ezek a kétszeresen vonalkázott részbe fognak kerülni. A legalább egyszeresen vonalkázott részbe kerülnek azok, akiknek vagy mondókájuk, vagy jelmezük, esetleg mindkettő van, s ezek száma 11. Ezek közül elvéve azon tanulók számát, akiknek van mondókájuk (függőlegesen vonalkázott rész), akkor megkapjuk azon tanulók számát, akiknek csak jelmezük van, azaz, ezek száma 11 — 8 = 3. Három tanulónak van mondókája, *de nincs* jelmeze. Ha a jelmezzel rendelkezők közül elvesszük azokat, akiknek jelmezük *és* mondókájuk is van, kapjuk azon tanulókat, akiknek csak jelmezük van (csak függőlegesen vonalkázott rész) azaz 8 — 5 = 3. Tehát három tanulónak csak jelmeze van, azaz van jelmeze, *de nincs* mondókája. Ha az őrs létszámából elvesszük azoknak a számát, akiknek mondókája *vagy* jelmeze van (a kettőből legalább egy), akkor megkapjuk azon tanulók számát, akik még hozzá sem kezdtek a készülődéshez. Ezek száma 12 — — 11 = 1. Tehát egy tanulónak nincs *sem* mondókája, *sem* jelmeze. Készítsünk a 10. ábrának megfelelő ábrát (12. ábra!)

Helyezzünk el néhány tanulót a 11. és a 12. ábrán!

3. foglalkozás

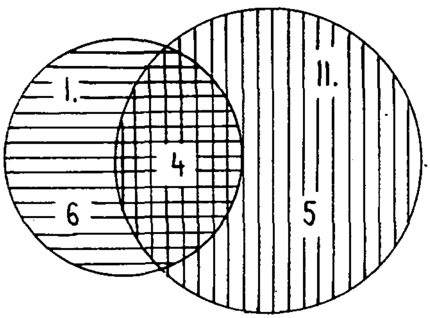
1. Két munkás dolgozott egy munkán. Az egyik 10 napot dolgozott, s ebből 6 napot egyedül s így 15 nap alatt készültek el.



12. ábra

Hány napot dolgozott a másik munkás? Hány napot dolgoztak együtt? Hány napot dolgozott egyedül a másik? Hány nap dolgozott csak egy munkás?

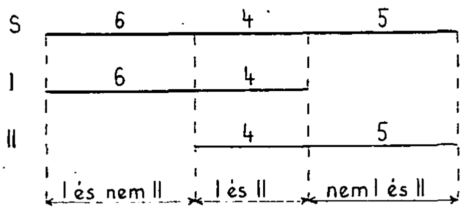
Jelölje: S a munka elvégzéséhez szükséges napok halmazát, I. az egyik munkás munkanapjainak halmazát, II. a másik munkás munkanapjainak halmazát. (13. ábra) Mivel az I.



13. ábra

munkás 10 napot dolgozott (vízszintesen vonalkázott rész) és ebből 6 napot egyedül (csak vízszintesen vonalkázott rész), ezért $10 - 6 = 4$ napot együtt dolgoztak. Mivel a munkát 15 nap alatt fejezték be, ezért a második egyedül $15 - 10 = 5$ napot dolgozott, (csak függőlegesen vonalkázott rész), ha ehhez hozzávesszük azon napok számát, mikor mindketten dolgoztak, kapjuk a II. munkás napjainak a számát $4 + 5 = 9$. Azon napok száma, mikor csak egy munkás dolgozott. (egyszeresen vonalkázott részek összege) $6 + 5 = 11$ vagy $15 - 4 = 11$ adódik.

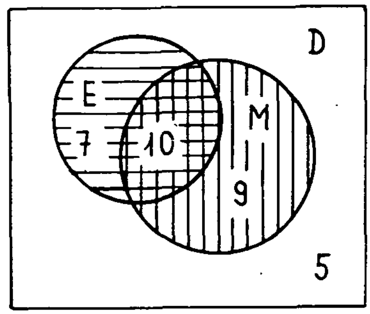
A megoldás könnyen leolvasható a 14. ábráról is.



14. ábra

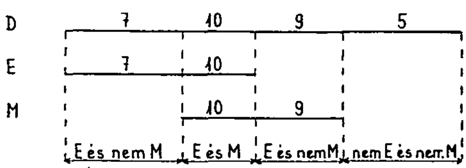
2. Egy dolgozat írásakor két feladat volt kitűzve. Csak az elsőt 7 tanuló, csak a másodikat 9 tanuló oldotta meg helyesen és 5 tanulónak nem volt helyes megoldása, de 26 tanuló legalább egy feladatra helyes megoldást adott. Hány tanuló oldotta meg az első, a második, mindkét feladatot helyesen? Hány tanuló írt dolgozatot?

Legyen: D azon tanulók halmaza, akik dolgozatot írtak. E azon tanulók halmaza, akik az elsőt, M azon tanulók halmaza, akik a másodikat (15. ábra) helyesen oldották meg. Mivel 5



15. ábra

tanuló egyet sem oldott meg helyesen és 26 tanuló legalább egyet helyesen megoldott, ezért a dolgozatott írt tanulók száma $5 + 26 = 31$. Azon tanulók száma, akik az elsőt megoldották *és* a másodikat *nem*, 7, és azok száma, akik a másodikat megoldották, *de* az elsőt *nem*, 9, s így csak egy feladatot $9 + 7 = 16$ tanuló oldott meg. Viszont 26 tanuló legalább egyet megoldott (elsőt *vagy* a másodikat, esetleg mindkettőt) ezért $26 - 16 = 10$ azon tanulók száma, akik a két feladatot helyesen megoldották (kétszeresen vonalkázott rész). Azon tanulók száma, akik az elsőt helyesen oldották meg $10 + 7 = 17$ (ezek tehát vagy csak az elsőt, vagy mindkettőt helyesen oldották meg). Hasonlóan a másodikat helyesen megoldók száma $10 + 9 = 19$. Készítsünk a 14. ábrának megfelelő ábrát is! (16. ábra)

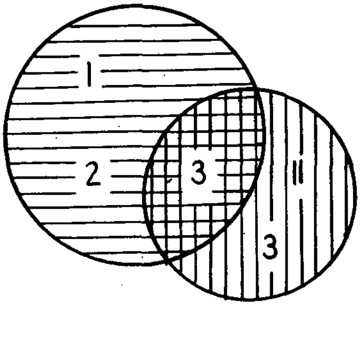


16. ábra

3. Két tanuló összehasonlítja az ötösei számát, és azt tapasztalják, hogy 8 tárgy közül legalább egyikűknek ötöse van. Van három olyan tárgy, amelyből mindkettőnek, de az egyiknek több tárgyból van ötöse, mint a másiknak. Viszont legalább 5 tárgyból mindkettőnek van ötöse. Mennyi azon tárgyak száma,

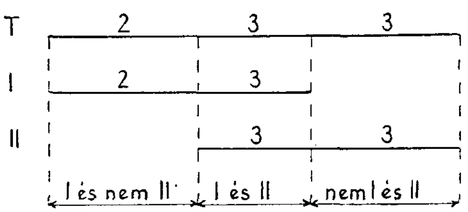
melyből csak egyiküknek van ötöse? Mennyi ötöse van egy-egy tanulónak?

Jelölje: T azon tárgyak halmazát, amelyből legalább egyiküknek van ötöse, I. azon tárgyak halmazát, melyből az egyik tanulónak vannak ötösei, II. pedig azon tárgyak halmazát, melyből a másik tanulónak vannak ötösei. (17. ábra) Vonalkázzuk I-t vízszintesen, II-t



17. ábra

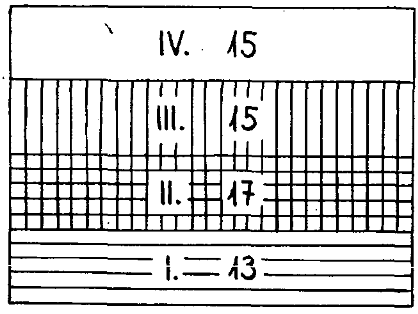
függőlegesen. Mivel 3 tárgyból mindkettőnek van ötöse, így a kétszeresen vonalkázott részben három tárgy van. A 8 tárgy közül tehát 3-ból mindkettőnek ötöse van, így $8 - 3 = 5$ tárgyból van csak egynek (egyszeresen vonalkázott részek). Viszont legalább 5 tárgyból mindkettőnek van ötöse, ez csak úgy lehet, hogy a 3-on kívül az egyiknek 2, a másiknak 3 tárgyból van még ötöse. Az egyes tanulók ötöseinek a száma tehát $3 + 2 = 5$, és $3 + 3 = 6$. Készítsük el a 18. ábrát is, s végezzük el az elemzést!



18. ábra

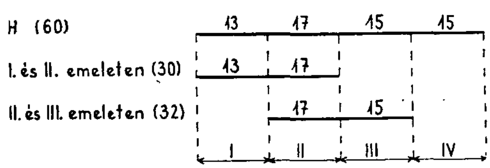
4. Egy négyemeletes házban 60 család lakik. Az első és második emeleten 30, a második és harmadik emeleten 32, a negyedik emeleten pedig a családok $^1/_4$ része. Hány család lakik az egyes emeleteken, ha a földszinten nincs lakás, mert ott üzletek vannak?

Az első és második emeletet vonalkázzuk vízszintesen; a második és harmadik emeletet függőlegesen. Mivel a negyedik emeleten a családok $^1/_4$ része lakik és összesen 60 család van, ezért a IV. emeleten 15 család lakik, s így az I., II., III. emeleten összesen 45, (legalább egyszeresen vonalkázott rész). Ha ebből elvesszük a függőlegesen vonalkázott részt, azaz a 32-t, akkor megkapjuk, hogy az I. emeleten mennyi család lakik: $45 - 32 = 13$. (19. ábra) Ha viszont a vízszintesen vonalkázott részt vesszük el, akkor megkapjuk,



19. ábra

hogy a III. emeleten hány család lakik, $45 - 30 = 15$ s a másodikon $30 - 13 = 17$ család lakik. A megoldás a 20. ábra alapján is adódik, ahol H jelöli a házban lakó családok halmazát.



20. ábra

(Folytatása a következő számban)

„Ha minden fáradozás, melyet embertársaink javára fordítanánk, haszontalan volna, s legnemesebb törekvéseinknek nem lehetne semmi eredménye; ha magasabb vágyaink nem teljesülhetnének, s a szép és jó soha nem győzhetne a világon; még akkor is e nyomorult létnek legszebb része azoknak jutott, kik csalódásaikat sírukig megtartják, s ha nem győztek is, legalább végső lehelletig nemes célokért küzdöttek."

(Eötvös József)